## הוכחה קומבינטורית

מס' תתי הקבוצות של קבוצה בגודל n הוא מצד אחד: (הוכחנו בעבר).  
מצד שני: נספור את: שזה בעצם

## הוכחה דרך הבינום:

# טענה

תהי סופית, הוכיחו שמס' תת הקבוצות בגודל זוגי של A=מספר תת הקבוצות בגודל אי זוגי של A.

## פתרון

נסמן . צ"ל

## הוכחה ראשונה

נבנה פונקציה :

הפונקציה ההפוכה g תבצע אותה פעולה, לכן . לכן עצמת הקבוצות שווה.

## הוכחה שנייה

צ"ל . מתקיים:

# תרגיל

הוכיחו ():

## הוכחה

מס' הדרכים לבחור מקבוצה בגודל n ועד בגודל כלשהו עם יו"ר בראשו הוא:  
דרך 1: נבחר את היו"ר(וזאת ניתן לעשות בn דרכים) ואז נבחר קבוצה בגודל כלשהו שצטרף אליו וזאת ניתן לעשות ב דרכים, לכן לפי עקרון המכפלה יש דרכים.

דרך 2: נסכום את מספר האפשרויות לבחור ועד עם יו"ר בראשו לפי גודל הועד.  
תחילה נבחר ועד בגודל 0 ואז יו"ר בראשו וזאת ניתן לעשות ב  
+  
ועד בגודל 1 ואז יו"ר בראשו וזאת ניתן לעשות ב  
+  
...  
+  
ועד בגודל 1 ואז יו"ר בראשו וזאת ניתן לעשות ב

סה"כ יש דרכים

## דרך הבינום

נגזור את שני האגפים:  
נציב :

## דרך שלישית

שימו לב:

*לכן  
נגדיר . ואז:*  
לכן:

# תרגיל

הוכיחו

## הוכחה קימבינטורית

מספר הדרכים לבחור קבוצה בגודל k מקבוצה בגודל n+m(n נשים m גברים):

דרך אחת: נבחר k מתוך n+m:

דרך שנייה: אם בוחרים קבוצה בגודל i מתוך הקבוצה בגודל n צריך לבחור k-i מתוך הקבוצה בגודל m, וסה"כ יש . נסכום את כל הדרכים האלה ונקבל

## הוכחה אלגברית

מצד אחד המקדם של הוא

מצד שני המקדם של הוא :

משולש פסקל

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

זהות פסקל:

נחשב את המשולש:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |
|  |  |  | 1 |  | 1 |  |  |  |
|  |  | 1 |  | 2 |  | 1 |  |  |
|  | 1 |  | 3 |  | 3 |  | 1 |  |

עבור:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |
|  |  |  | 1 |  | 1 |  |  |  |
|  |  | 1 |  | 2 |  | 1 |  |  |
|  | 1 |  | 3 |  | 3 |  | 1 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

# תרגיל

מצאו את מס' המילים שניתן לבנות מn אפסים, m אחדות וk 2ים(גודל מילה הוא )

## פתרון

נתחיל במיקום n האפסים בn+m+k מקומות: דרכים  
כדי למקם את m האחדות בm+k מקומות יש דרכים  
כדי למקם את k ה2ים בk מקומות יש דרכים.

סה"כ יש:

# משפט

מספר המילים שניתן לבנות מהקבוצה הכוללות iים עבור הוא:

## הוכחה

באינדוקציה על k: עבור k=1 מספר המילים הדרוש הוא .

נניח נכונות עבור ונוכיח עבור k. יש לנו מקומות, נבחר מקומות להניח את הkים וזאת ניתן לעשות ב דרכים. ואז נותר למקם את האיברים ב מקומות, וזאת ניתן לעשות לפי הנחת האינדוקציה ב. לכן לפי עקרון המכפלה:

## בעיה שקולה

בכמה דרכים ניתן למקם כדורים מסוג 1, כדורים מסוג 2,... כדורים מסוג k ל תאים כך שתכולת כל תא היא בדיוק כדור אחד?

# הגדרה

יהיו . נסמן המספר נקרא המקדם המולטינומי ומסומן

## הערה

אם יש רק שניים למטה אז מספיק לרשום אחד, אבל אם יש יותר צריך לרשום את כולם.

# משפט

יהיו ו אזי:

## הערה

מספר המילים האפשריות מהצורה הוא מספר הפתרונות למשוואה  
 שזה שווה ל

# תרגיל

. מצאו את המקדם של

## פתרון